SOLUCIONES DE DETERMINANTES

1. Calcular los siguientes determinantes:

$$A=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & -3\end{vmatrix} : B=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix} : C=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} : D=\begin{vmatrix}3 & 1 & 0 & 4\\ 2 & 3 & 5 & 1\\ -1 & -2 & 3 & -4\\ 4 & -5 & 1 & 3\end{vmatrix} : E=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & 5\\ 4 & -1 & 3 & 2\\ 3 & 6 & 8 & 5\\ 2 & 3 & 4 & -4\end{vmatrix}$$

Solución:

$$A=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & -3\end{vmatrix}=3\cdot(-3)-2\cdot(-1)=-7$$

$$B=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}=1\cdot5\cdot9+2\cdot6\cdot7+3\cdot4\cdot8-(7\cdot5\cdot3+8\cdot6\cdot1+9\cdot4\cdot2)=45+84+96-(105+48+72)=225-225=0$$

$$C=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot1+0\cdot0\cdot1+1\cdot0\cdot0-(1\cdot1\cdot1+0\cdot0\cdot1+1\cdot0\cdot0)=1-1=0$$

$$D=\begin{vmatrix}3 & 1 & 0 & 4\\ 2 & 3 & 5 & 1\\ -1 & -2 & 3 & -4\\ 4 & -5 & 1 & 3\end{vmatrix}=\begin{Bmatrix}C_1=C_1-3C_2\\ C_4=C_4-4C_1\end{Bmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -7 & 3 & 5 & -11\\ 5 & -2 & 3 & 4\\ 19 & -5 & 1 & 23\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-7 & 5 & -11\\ 5 & 3 & 4\\ 19 & 1 & 23\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{Bmatrix}F_1=F_1-5F_3\\ F_2=F_2-3F_3\end{Bmatrix}=-\begin{vmatrix}-102 & 0 & -126\\ -52 & 0 & -65\\ 19 & 1 & 23\end{vmatrix}=(-)\cdot1\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}-102 & -126\\ -52 & -65\end{vmatrix}=-102\cdot(-65)-(-52)\cdot(-126)=78$$

En el primer caso se toma como pivote el elemento 1.2. y se hacen cero los demás términos de la primera fila operando con las columnas, y en el segundo caso, se toma como pivote el elemento 3.2. anulado todos los demás términos de la segunda columna operando con las filas.

$$E=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & 5\\ 4 & -1 & 3 & 2\\ 3 & 6 & 8 & 5\\ 2 & 3 & 4 & -4\end{vmatrix}=\begin{Bmatrix}C_2=C_2-2C_1\\ C_4=C_4-5C_1\end{Bmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 4 & -9 & 3 & -18\\ 3 & 0 & 8 & -10\\ 2 & -1 & 4 & -14\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-9 & 3 & -18\\ 0 & 8 & -10\\ -1 & 4 & -14\end{vmatrix}=$$

$$=\{F_1=F_1-9F_3\}=\begin{vmatrix}0 & -33 & 108\\ 0 & 8 & -10\\ -1 & 4 & -14\end{vmatrix}=-1\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-33 & 108\\ 8 & -10\end{vmatrix}=-(-33\cdot(-10)-8\cdot108)=534$$

2. Comprobar sin desarrollar que los siguientes determinantes son nulos:

$$\begin{vmatrix} 3 & 15 & 1 \\ 5 & 25 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 2 & 7 & 11 \\ 4 & 5 & 13 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 7 & 5 & 4 \\ 10 & 10 & 10 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 3 & 15 & 1 \\ 5 & 25 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5\cdot 5 & 1 \\ 5 & 5\cdot 5 & 0 \\ 1 & 5\cdot 1 & 7 \end{vmatrix} = 5\cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 11 \\ 4 & 5 & 13 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \{C_2 = C_2 + 2C_1\} = \begin{vmatrix} 2 & 11 & 11 \\ 4 & 13 & 13 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 7 & 5 & 4 \\ 10 & 10 & 10 \end{vmatrix} = \{C_3 = C_3 - C_1 - C_2\} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 7 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \{C_3 = C_3 + C_2\} = \begin{vmatrix} a & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\cdot \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3. Obtener, simplificando, el determinante $\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & b^2c & 3abc \end{vmatrix}$

Solución:

Teniendo en cuenta la propiedad de los determinantes que dice: Si todos los términos de una línea (fila ó columna) de un determinante aparecen multiplicamos por el mismo número, se puede sacar factor común de dicho número quedando el determinante multiplicado por ese número.

$$\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{2.1} & a_{3.1} \\ k\cdot a_{2.1} & k\cdot a_{2.2} & k\cdot a_{3.2} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \end{vmatrix} = k\cdot \begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{2.1} & a_{3.1} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{3.2} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & b^2c & 3abc \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} F_1 : (a) \\ F_2 : (b) \\ F_3 : (bc) \end{matrix} \right\} = a\cdot b\cdot bc = \begin{vmatrix} bc & -b & a \\ -bc & 2b & -a \\ bc & b & 3a \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} C_1 : (bc) \\ C_2 : (b) \\ C_3 : (a) \end{matrix} \right\} = ab^2c\cdot bc\cdot b\cdot a\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$=2\cdot a^2b^4c^2$$

4. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} = 3$, calcular $\begin{vmatrix} 2x & 2z & 2y \\ 2m & 2p & 2n \\ 2a & 2c & 2b \end{vmatrix}$

Solución:

Teniendo en cuenta las propiedad de los determinantes que dicen:

- Si todos los términos de una línea (fila ó columna) de un determinante aparecen multiplicamos por el mismo número, se puede sacar factor común de dicho número quedando el determinante multiplicado por ese número.

$$\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{2.1} & a_{3.1} \\ k\cdot a_{2.1} & k\cdot a_{2.2} & k\cdot a_{3.2} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \end{vmatrix} = k\cdot\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{2.1} & a_{3.1} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{3.2} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \end{vmatrix}$$

- Si permutamos dos líneas paralelas de una matriz cuadrada, su determinante cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{2.1} & a_{3.1} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{3.2} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \end{vmatrix} = \{F_1 \leftrightarrow F_2\} = -\begin{vmatrix} a_{2.1} & a_{2.2} & a_{3.2} \\ a_{1.1} & a_{2.1} & a_{3.1} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \end{vmatrix} = \{C_1 \leftrightarrow C_2\} = +\begin{vmatrix} a_{2.2} & a_{2.1} & a_{3.2} \\ a_{2.1} & a_{1.1} & a_{3.1} \\ a_{3.2} & a_{3.1} & a_{3.3} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2x & 2z & 2y \\ 2m & 2p & 2n \\ 2a & 2c & 2b \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 : (2) \\ F_2 : (2) \\ F_3 : (2) \end{Bmatrix} = 2\cdot 2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} x & z & y \\ m & p & n \\ a & c & b \end{vmatrix} = \{C_2 \leftrightarrow C_3\} = -8\cdot\begin{vmatrix} x & y & z \\ m & n & p \\ a & b & c \end{vmatrix} =$$

$$= \{F_2 \leftrightarrow F_3\} = +8\cdot\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ m & n & p \end{vmatrix} = \{F_1 \leftrightarrow F_2\} = -8\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} = -8\cdot 3 = -24$$

5. Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 1$ calcular $\begin{vmatrix} 3+x & 8+y & 4+z \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 8/3 & 4/3 \end{vmatrix}$

Solución:

Utilizando las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 3+x & 8+y & 4+z \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 8/3 & 4/3 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 ;2 \\ F_3 ;1/3 \end{Bmatrix} = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\begin{vmatrix} 3+x & 8+y & 4+z \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix} = \{F_1 = F_1 - F_3\} = \frac{2}{3}\cdot\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}$$

6. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 5$, calcular $\begin{vmatrix} 2x & z & 3y \\ 10p & 5r & 15q \\ 2a & c & 3b \end{vmatrix}$

Solución:

Utilizando las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 2x & z & 3y \\ 10p & 5r & 15q \\ 2a & c & 3b \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1;2 \\ C_3;3 \end{Bmatrix} = 2\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} x & z & y \\ 5p & 5r & 5q \\ a & c & b \end{vmatrix} = \{F_2;5\} = 6\cdot 5\cdot \begin{vmatrix} x & z & y \\ p & r & q \\ a & c & b \end{vmatrix} = \{F_2;5\} = 6\cdot 5\cdot \begin{vmatrix} x & z & y \\ p & r & q \\ a & c & b \end{vmatrix} =$$

$$= \{F_1 \leftrightarrow F_3\} = -30\cdot \begin{vmatrix} a & c & b \\ p & r & q \\ x & z & y \end{vmatrix} = \{F_2 \leftrightarrow F_3\} = +30\cdot \begin{vmatrix} a & c & b \\ x & z & y \\ p & r & q \end{vmatrix} = \{C_2 \leftrightarrow C_3\} = -30\cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = -30\cdot 5 = -150$$

7. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = 1$, calcular $\begin{vmatrix} c & b & a \\ k & h & g \\ f & e & d \end{vmatrix}$

Solución:

Utilizando las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} c & b & a \\ k & h & g \\ f & e & d \end{vmatrix} = \{C_1 \leftrightarrow C_3\} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & k \\ d & e & f \end{vmatrix} = \{F_2 \leftrightarrow F_3\} = +\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = 1$$

8. Demostrar que los siguientes determinantes son múltiplos de:

i) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}$ múltiplo de 7

ii) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ múltiplo de 17

Solución:

i) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = \{C_1 = C_1 + 10C_2\} = \begin{vmatrix} 21 & 2 \\ 49 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7\cdot 3 & 2 \\ 7\cdot 7 & 4 \end{vmatrix} = 7\cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}$

ii) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \{C_1 = C_1 + 10C_2 + 100C_3\} = \begin{vmatrix} 391 & 9 & 3 \\ 748 & 4 & 7 \\ 204 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17\cdot 23 & 9 & 3 \\ 17\cdot 44 & 4 & 7 \\ 17\cdot 12 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 17\cdot \begin{vmatrix} 23 & 9 & 3 \\ 44 & 4 & 7 \\ 12 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

9. Calcular los siguiente determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} F_2 = F_2 - aF_1 \\ F_3 = F_3 - aF_2 \end{matrix} \right\} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix} =$$
$$= (b-a)\cdot(c-a)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} = (b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-b)$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = x\cdot y\cdot z\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} F_2 = F_2 - xF_1 \\ F_3 = F_3 - xF_2 \end{matrix} \right\} = x\cdot y\cdot z\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-x \\ 0 & y^2-xy & z^2-xz \end{vmatrix} =$$
$$x\cdot y\cdot z\cdot 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} y-x & z-x \\ y\cdot(y-x) & z\cdot(z-x) \end{vmatrix} = x\cdot y\cdot z\cdot(y-x)\cdot(z-z)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y & z \end{vmatrix} = x\cdot y\cdot z\cdot(y-x)\cdot(z-x)\cdot(z-y)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} F_2 = F_2 - a^2F_1 \\ F_3 = F_3 - a^2F_2 \end{matrix} \right\} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \\ 0 & b^4-a^2b^2 & c^4-a^2c^2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} b^2-a^2 & c^2-a^2 \\ b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) \end{vmatrix} =$$
$$= (b^2-a^2)\cdot(c^2-a^2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b^2-a^2)(c^2-a^2)(c^2-b^2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} F_2 = F_2 - a^2F_1 \\ F_3 = F_3 - aF_2 \end{matrix} \right\} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \\ 0 & b^3-ab^2 & c^3-ac^2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} b^2-a^2 & c^2-a^2 \\ b^2(b-a) & c^2(c-a) \end{vmatrix} =$$
$$= (b-a)\cdot(c-a)\cdot\begin{vmatrix} b+a & c+a \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \{C_1 = C_1 - C_2\} = (b-a)(c-a)\cdot\begin{vmatrix} b-c & c+a \\ b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix} =$$
$$= (b-a)(c-a)\cdot\begin{vmatrix} b-c & c+a \\ (b-c)(b+c) & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(b-c)\cdot\begin{vmatrix} 1 & c+a \\ b+c & c^2 \end{vmatrix} =$$
$$= (b-a)(c-a)(b-c)\left[c^2-(b+c)(c+a)\right] = (b-a)(c-a)(b-c)\left[c^2-(bc+c^2+ba+ca)\right] =$$
$$= (b-a)(c-a)(b-c)(-bc-ba-ca)$$

10. Calcular el valor del determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & a+2 \\ a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & a+2 \\ a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 = F_2 - aF_1 \\ F_3 = F_3 - aF_2 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & (a+1)-a & (a+2)-a \\ 0 & (a+1)^2 - a(a+1) & (a+2)^2 - a(a+2) \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} (a+1)-a & (a+2)-a \\ (a+1)[(a+1)-a] & (a+2)[(a+3)-a] \end{vmatrix} = -[(a+1)-a] \cdot [(a+2)-a] \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+1 & a+2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot [a+2-(a+1)] = 2 \cdot 1 = 2$$

11. Desarrollar y simplificar el siguiente determinante: $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = \{F_3 = F_3 + F_2 + F_1\} = \begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ 2b+2c & 2c+2a & 2a+2b \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} =$$

$$= \{F_1 = F_1 + F_2 + F_3\} = 2 \begin{vmatrix} 3b+2c & 3a+2c & 2a+2b \\ b & c+a & b \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \{F_1 = F_1 - 2F_3\} = 2 \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ b & c+a & b \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} =$$

$$= \{F_3 = F_3 - F_1\} = 2 \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = \{F_2 = F_2 - F_1\} = 2 \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ 0 & c & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = \{F_3 = F_3 - F_2\} = \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ 0 & c & b \\ c & 0 & a \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \left[b \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} c & b \\ 0 & a \end{vmatrix} + a \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & a \end{vmatrix} \right] = 2 \cdot \left[b \cdot \begin{vmatrix} c & b \\ 0 & a \end{vmatrix} - a \cdot \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & a \end{vmatrix} \right] = 2\left(b \cdot c \cdot (-1)^{1+1} \cdot |a| - a \cdot b \cdot (-1)^{2+1} \cdot c\right) =$$

$$2 \cdot (abc + abc) = 4abc$$

12. Calcular en función de n $\begin{vmatrix} n & n+1 & n+2 \\ n+3 & n+4 & n+5 \\ n+6 & n+7 & n+8 \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} n & n+1 & n+2 \\ n+3 & n+4 & n+5 \\ n+6 & n+7 & n+8 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} n & n+1 & n+2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

por ser F_2 proporcional a F_3.

13. Calcular el valor del determinante $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-1 & b+2 & c-1 \\ a+1 & b-3 & c+2 \end{vmatrix}$ conocidos a, b, c

Solución:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-1 & b+2 & c-1 \\ a+1 & b-3 & c+2 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} C_2 = C_2 + 2C_1 \\ C_3 = C_3 - C_1 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2a+b & c-a \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2a+b & c-a \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \{C_1 = C_1 + C_2\} = \begin{vmatrix} a+b+c & c-a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot |a+b+c| = a+b+c$$

14. Determinar los valores de m que anulan el determinante $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ m & m+1 & m \\ 2m & 2m+1 & 2m+1 \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ m & m+1 & m \\ 2m & 2m+1 & 2m+1 \end{vmatrix} = \{F_3 = F_3 - 2F_2\} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ m & m+1 & m \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \{C_2 = C_2 + C_1\} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 2m+1 & m \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2m+1 & m \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \{C_1 = C_1 + C_2\} = \begin{vmatrix} 3m+1 & m \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot |3m+1| = 3m+1$$

15. Determinar el valor de a que anula el siguiente determinante $\begin{vmatrix} 3a+1 & a & a \\ 6a+2 & 2a+1 & 2a \\ 3a+1 & a & a+1 \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 3a+1 & a & a \\ 6a+2 & 2a+1 & 2a \\ 3a+1 & a & a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a+1 & a & a \\ 2(3a+1) & 2a+1 & 2a \\ 3a+1 & a & a+1 \end{vmatrix} = (3a+1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 2 & 2a+1 & 2a \\ 1 & a & a+1 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 = F_2 - 2F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1 \end{Bmatrix} =$$

$$= (3a+1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3a+1) \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3a+1$$

16. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & x \end{vmatrix} + 5 = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ x & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$; c) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ x-1 & 0 & x+3 \\ 1 & x-2 & 4 \end{vmatrix} = 1-7x$

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & x \end{vmatrix} = \{C_2 = C_2 - C_3\} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ x & 1 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ x & 1 \end{vmatrix} = \{C_2 = C_2 + C_1\} = x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x & x+1 \end{vmatrix} =$$

$$= x \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot |x+1| = x \cdot (x+1)$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

Sustituyendo en la ecuación: $x \cdot (x+1) + 5 = 7;\ x^2 + x - 2 = 0;\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ x & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 = C_1 - C_2 \\ C_4 = C_4 + 2C_2 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 \\ x+2 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & x+2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ x+2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & x+2 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ x+3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} x+3 & -7 \\ 0 & x-2 \end{vmatrix} = -(x+3)(x-2) = 0 \quad x = -3 \text{ ó } x = 2$$

c)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ x-1 & 0 & x+3 \\ 1 & x-2 & 4 \end{vmatrix} = \{C_2 = C_2 + C_1\} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x-1 & x-1 & -x+5 \\ 1 & x-1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} x-1 & -x+5 \\ x-1 & 2 \end{vmatrix} = (x-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -x+5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \{F_2 = F_2 - F_1\} = (x-1)(x-3)$$

$$x^2 - 4x + 3 = 1 - 7x; \quad x^2 + 3x + 2 = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

17. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ y A^t la matriz traspuesta de A. Hallar $\left| \left(A^t \cdot A^{-1}\right)^{276} \right|$

Solución:

Teniendo en cuenta que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ y $|A^t| = |A|$:

- $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
- $|A^t| = |A|$
- $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \left| \left(A^t \cdot A^{-1}\right)^{276} \right| = |A^t \cdot A^{-1}|^{276} = |A^t|^{276} \cdot |A^{-1}|^{276} = |A|^{276} \cdot \frac{1}{|A|^{276}} = 1$$